第27卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0133-06

一类四阶两点边值问题多个正解的存在性*

闫东明

(西北师范大学数学与信息科学学院，兰州 730070)

摘　要: 两端简单支撑弹性梁的形变可以用四阶常微分方程两点边值问题来描述。由于其在物理中的重要性，已有许多人研究了该类问题解的存在性，但在实际应用中该类问题正解以及多个正解的存在性更为重要。本文应用锥上的不动点定理，研究了该类四阶常微分方程两点边值问题多个正解的存在性，给出了该类问题多个正解存在的充分条件，本文结果推广和改进了一些已知结果。最后给出一例作为所获结果的应用。

关键词: 四阶边值问题；锥；多个正解；存在性

分类号: **AMS**(2000) 34B15; 34G20　　**中图分类号**: O175.8　　**文献标识码**: A

1　引言

四阶两点边值问题正解的存在性已引起人们的广泛关注，并且已经取得了许多深刻的结果，见文献[1-5]。

1995年，文献[1]应用锥上的不动点定理研究了四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,u(t)), \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其结果依赖于非线性项 $f(t,u)$ 满足超线性或次线性条件。

随后，在1997年，文献[2]应用锥上的不动点定理研究了四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=h(t)f(u(t)), \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

多个正解的存在性。

在2003年，文献[3]应用不动点指数定理研究了四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\beta u''(t)-\alpha u(t)=f(t,u(t)), \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性，得出了四阶边值问题(3)有一个正解存在的结果。

受以上工作的启发，本文试图考察四阶边值问题(3)多个正解的存在性。当 $\alpha=\beta=0$ 时，问题(3)退化为问题(1)，当 $\alpha=\beta=0$，$f(t,u)=h(t)f(u)$ 时，问题(3)退化为问题(2)。因此本文的结果更具有一般性。

收稿日期: 2008-05-19.　**作者简介**: 闫东明(1982年9月生)，男，硕士. 研究方向：常微分方程边值问题.

*__基金项目__: 高等学校博士学科点专项科研基金(20060736001).

本文总假定。

(H_1) $f:[0,\ 1]\times[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 连续；

(H_2) $\alpha,\ \beta\in R$ 且 $\beta<2\pi^2,\ \alpha\geq-\beta^2/4,\ \alpha/\pi^4+\beta/\pi^2<1$。

2 预备知识及引理

设 $C[0,1]$ 为定义在 [0,1] 上的连续实值函数构成的 Banach 空间，其上范数为

$$\|x\|=\sup\left\{|x(t)|\mid t\in[0,1]\right\}.$$

记

$$f_0:=\liminf_{u\to0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u},\qquad f^0:=\limsup_{u\to0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u},$$

$$f_\infty:=\liminf_{u\to+\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u},\qquad f^\infty:=\limsup_{u\to+\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}.$$

引理1[1] 设 $G_i(t,s),\ i=1,2$ 为线性边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)+\lambda_iu(t)=0, & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

的 Green 函数。则

(i) $G_i(t,s)>0,\ t,\ s\in(0,1)$;

(ii) $G_i(t,s)\leq C_iG_i(s,s),\ t,\ s\in[0,1]$;

(iii) $G_i(t,s)\geq\delta_iG_i(t,t)G_i(s,s),\ t,\ s\in[0,\ 1]$，其中 $C_i>0,\ \delta_i>0$ 为常数，

$$\lambda_1,\ \lambda_2=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\alpha}}{2}$$

是 $\lambda^2+\beta\lambda-\alpha=0$ 的两个根。

引理2[1] 设 (H_2) 成立，且 $h\in C[0,1]$。则线性边值问题

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)+\beta u''(t)-\alpha u(t)=h(t), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0\end{cases}\tag{4}$$

有一个解 u。进一步

$$u(t)=\int_0^1\int_0^1G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)h(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.\tag{5}$$

引理3 设 (H_2) 成立，$h\in C[0,1]$，且 $h\geq0$。则线性边值问题 (4) 的解 u 满足

$$\min_{t\in[\frac14,\frac34]}u(t)\geq\frac{\delta_1\delta_2C_0m_1}{C_1C_2M_1}\|u\|.$$

其中

$$M_1=\max_{s\in[0,1]}G_1(s,s),\quad m_1=\min_{s\in[\frac14,\frac34]}G_1(s,s),\quad C_0=\int_0^1G_1(\tau,\tau)G_2(\tau,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

证明 由 (5) 及引理 1 中 (ii) 可得

$$\|u\| \le C_1C_2M_1\int_0^1 G_2(s,s)h(s)\mathrm{d}s. \tag{6}$$

再由 (5)，引理 1 中 (iii) 以及 (6) 可得

$$\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(t) \ge \min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} \delta_1\delta_2C_0G_1(t,t)\int_0^1 G_2(s,s)h(s)\mathrm{d}s \ge \frac{\delta_1\delta_2C_0m_1}{C_1C_2M_1}\|u\|.$$

3 主要结果及证明

定理 1 设 (H_1) 和 (H_2) 成立。设存在两个不同的正常数 λ, η，使得

$$f(t,\ u) \le \lambda A, \quad (t,u)\in[0,1]\times[0,\lambda], \tag{7}$$

且

$$f(t,u) \ge \eta B, \quad (t,u)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times[\sigma\eta,\eta]. \tag{8}$$

则边值问题 (3) 至少有一个正解 u，且 $\|u\|$ 在 λ, η 之间。其中

$$A = \left(C_1\int_0^1\int_0^1 G_1(\tau,\tau)G_2(\tau,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right)^{-1},$$

$$B = \left(\delta_1\delta_2m_1C_0\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G_2(s,s)\mathrm{d}s\right)^{-1}, \quad \sigma = \frac{\delta_1\delta_2C_0m_1}{C_1C_2M_1}.$$

证明 不难验证边值问题 (3) 等价于积分方程

$$u(t) = \int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau := (Au)(t), \tag{9}$$

其中 $G_i(t,s)$, $i=1,2$，如同引理 1 中定义。记

$$K = \left\{u\in C[0,1] : u(t)\ge 0,\ \min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(t) \ge \sigma\|u\|\right\}.$$

显然，K 是 $C[0,1]$ 中的锥。由引理 3 易知 $AK\subset K$。容易验证 $A:K\to K$ 是全连续算子。

不失一般性，不妨设 $\lambda<\eta$。

取 $\Omega_1=\{u\in C[0,1]:\|u\|<\lambda\}$，则当 $u\in K\cap\partial\Omega_1$ 时，由 (9)，引理 1 中 (ii) 以及 (7) 得

$$\begin{aligned}(Au)(t) &= \int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &\le C_1\int_0^1\int_0^1 G_1(\tau,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &\le C_1\lambda A\int_0^1\int_0^1 G_1(\tau,\tau)G_2(\tau,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &= \|u\|.\end{aligned}$$

因此 $\|Au\|\le\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_1$。

取 $\Omega_2=\{u\in C[0,1]:\|u\|<\eta\}$，则当 $u\in K\cap\partial\Omega_2$ 时，有 $u(t)\le\|u\|=\eta$，$t\in[0,1]$，又由 K 的定义以及 u 的连续性，对任意的 $t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$，有

$$u(t)\ge\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}u(t)\ge\sigma\|u\|=\sigma\eta.$$

因此 $u\in K\cap\partial\Omega_2$，有 $\sigma\eta\le u(t)\le\eta$，$t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$。再由 (9)，引理 1 中 (iii) 以及 (8) 可得

$$\begin{aligned}(Au)\Big(\frac{1}{2}\Big) &\ge \int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G_1\Big(\frac{1}{2},\tau\Big)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &\ge \eta B\delta_1\delta_2\int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G_1\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)G_1(\tau,\tau)G_2(\tau,\tau)G_2(s,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &\ge \eta\delta_1\delta_2C_0m_1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G_2(s,s)\mathrm{d}s\Big[\delta_1\delta_2C_0m_1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G_2(s,s)\mathrm{d}s\Big]^{-1}\\ &= \|u\|.\end{aligned}$$

因此 $\|Au\|\ge\|u\|$，$u\in K\cap\partial\Omega_2$。

由范数形式的锥拉伸与压缩不动点定理(见文献[6])知，A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上有一个不动点 u 满足：$\lambda\le\|u\|\le\eta$。

注 1 (a) 设 $f^0:=L_1\in[0,A)$。取 $\varepsilon=A-L_1>0$，则存在充分小的 $\lambda_3>0$，使得

$$\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}\le\varepsilon+L_1=A,\quad u\in(0,\lambda_3],$$

从而 $(t,u)\in[0,1]\times[0,\lambda_3]$，有 $f(t,u)\le Au\le A\lambda_3$，即定理 1 中 (7) 满足。

(b) 设

$$f_\infty:=L_2\in\Big(\frac{B}{\sigma},\infty\Big].$$

取

$$\varepsilon=L_2-\frac{B}{\sigma}>0,$$

则存在 $\eta_1>0$，使得

$$\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}\ge-\varepsilon+L_2=\frac{B}{\sigma},\quad u\in[\eta_1,\infty).$$

进一步，取充分大的 $\eta_2>0$，使得 $\sigma\eta_2>\eta_1$，则

$$(t,u)\in\Big[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\Big]\times[\sigma\eta_2,\eta_2],$$

有

$$f(t,u)\ge\frac{B}{\sigma}u\ge\frac{B}{\sigma}\sigma\eta_2=B\eta_2,$$

即定理 1 中 (8) 满足。

(c) 设

$$f_0:=L_3\in\Big(\frac{B}{\sigma},\infty\Big].$$

取

$$\varepsilon = L_3 - \frac{B}{\sigma} > 0,$$

则存在充分小的$\eta_3 > 0$，使得

$$\min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \geq -\varepsilon + L_3 = \frac{B}{\sigma}, \quad u \in (0, \eta_3],$$

从而$(t,u) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \times [\sigma\eta_3, \eta_3] \subseteq [0,1] \times [0,\eta_3]$，有

$$f(t,u) \geq \frac{B}{\sigma} u \geq \frac{B}{\sigma}\sigma\eta_3 = B\eta_3,$$

即定理1中(8)满足。

(d)　设$f^\infty := L_4 \in [0, A)$。取$\varepsilon = A - L_4 > 0$，则存在充分大的$\lambda_4 > 0$，使得

$$\max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \leq \varepsilon + L_4 = A, \quad u \in [\,\lambda_4, \infty). \tag{10}$$

当$\max\limits_{t\in[0,1]} f(t,u)$有界，即存在$\overline{M} > 0$，对$(t,u) \in [0,1] \times [0,\infty)$有$f(t,u) \leq \overline{M}$时，可取$\lambda_5 = \frac{\overline{M}}{A}$，对$(t,u) \in [0,1] \times [0,\lambda_5] \subseteq [0,1] \times [0,\infty)$，有$f(t,u) \leq \overline{M} = A\lambda_5$。

当$\max\limits_{t\in[0,1]} f(t,u)$无界时，存在$\lambda_6 \geq \lambda_4$ (λ_6充分大)以及$t_0 \in [0,1]$，使得

$$f(t,u) \leq f(t_0, \lambda_6), \quad (t,u) \in [0,1] \times [0, \lambda_6],$$

上式结合(10)可知，$f(t,u) \leq f(t_0,\lambda_6) \leq A\lambda_6$。

因此，以上两种情形定理1中(7)都满足。

由注1及定理1可得如下推论。

推论1　设(H_1)和(H_2)成立，A, B如同定理1中定义。若以下两条件之一满足：

(i)　$f^0 := L_1 \in [0, A)$, $f_\infty := L_2 \in (\frac{B}{\sigma}, \infty]$;

(ii)　$f_0 := L_3 \in (\frac{B}{\sigma}, \infty]$, $f^\infty := L_4 \in [0, A)$,

则边值问题(3)至少有一个正解。

注2　当$\alpha = \beta = 0$时，推论1是文献[1]主要结果的推广。推论1从以下两个方面推广了文献[1]的主要结果。

(i)　考虑了α, $\beta \neq 0$的情形；　　(ii)　f_0，f^0，f_∞，$f^\infty \in [0, \infty]$。

推论2　设(H_1)和(H_2)成立，A, B如同定理1中定义。若以下两条件成立。

(h_1)　$f_0 := L_3 \in (\frac{B}{\sigma}, \infty]$, $f_\infty := L_2 \in (\frac{B}{\sigma}, \infty]$;

(h_2)　存在$\lambda^* > 0$，使得$f(t,u) \leq \lambda^* A$, $(t,u) \in [0,1] \times [0, \lambda^*]$,

则边值问题(3)至少有两个正解u_1和u_2，且$0 < \| u_1 \| < \lambda^* < \| u_2 \|$。

注3　当$\alpha = \beta = 0$, $f(t,u) = h(t)f(u)$时，推论2是文献[2]定理1的推广。推论2从以下两个方面推广了文献[2]定理1。

(i)　考虑了α, $\beta \neq 0$的情形；

(ii)　f_0，f^0，f_∞，$f^\infty \in [0, \infty]$。

推论3　设(H_1)和(H_2)成立，A, B如同定理1中定义。若以下两条件成立。

(h_3)　$f^0 := L_1 \in [0, A)$, $f^\infty := L_4 \in [0, A)$;

(h_4)　存在$\eta^* > 0$，使得

$$f(t,u) \geq \eta^* B, \quad (t,u) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times [\sigma\eta^*, \eta^*],$$

则边值问题(3)至少有两个正解u_1和u_2，且$0 < \| u_1 \| < \eta^* < \| u_2 \|$。

4 应用举例

梁是工程上的重要组件之一，两端简单支撑弹性梁的形变可以用以下四阶边值问题来描述

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

令 $f(t,u) \equiv 1$。则容易验证条件 (H_1), (H_2) 满足，且 $f_0 = \infty$，$f^\infty = 0$。因此可根据推论1推知，四阶边值问题(11)至少有一个正解 u。事实上，可以验证 $u(t) = \frac{1}{24}(t^4 - 2t^3 + t)$ 就是四阶边值问题(11)的一个正解。

致谢：感谢审稿人对本文提出的宝贵建议。

参考文献：

[1] Ma R Y, Wang H Y. On the existence of positive solutions of fourth-order ordinary differential equations[J]. Applications of Analysis, 1995, 59: 225-231

[2] 马如云. 四阶边值问题的多个正解[J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，1997, 33(2): 1-5
Ma R Y. Multiple positive solutions of some fourth order boundary value problems[J]. Journal of Northwest Normal University (Natural Science Edition), 1997, 33(2): 1-5

[3] Li Y X. Positive solutions of fourth-order boundary value problem with two parameters[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 281: 477-484

[4] Ma R Y. Positive solutions of fourth-order two-point boundary value problems[J]. Annales Differen Equations, 1999, 15: 305-313

[5] 石东洋，彭玉成. 四阶特征值问题的各向异性有限元方法[J]. 工程数学学报，2008, 25(6): 1029-1034
Shi D Y, Peng Y C. The finite element methods for fourth order eigenvalue problems on anisotropic meshes[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(6): 1029-1034

[6] Guo D J. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. New York: Academic Press, 1988

Existence of Multiple Positive Solutions for a Class of Fourth-order Two-point Boundary Value Problems

YAN Dong-ming

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070)

Abstract: The deformations of an elastic beam in equilibrium state, whose two ends are simply supported, can be described by a fourth-order ordinary differential equation boundary value problem. Owing to its importance in physics, the existence of solutions to this problem has been studied by many authors. But in practice, only its positive solution is significant. The existence of multiple positive solutions for some fourth-order two-point boundary value problems are obtained by using the fixed point theorem in cone. The obtained results improve and extend the existing results partially. In the end, an example is presented to illustrate the application of the obtained results.

Keywords: fourth-order boundary value problem; cone; multiple positive solutions; existence

Received: 19 May 2008. **Accepted:** 29 Apr 2009.
Foundation item: SRFDP (20060736001).